САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2016 СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 1

Задачи подготовил:
Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2015 г.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Необычное созвездие небосвода»

Условие. Какое созвездие на современных звездных картах представляется парой изолированных областей, разделенных другим созвездием? Как называется «разделяющее» созвездие? В какой части небесной сферы (северной или южной) данное созвездие преимущественно расположено? (3 балла).

Решение:

Речь в условии задачи идет о созвездии Змея (см. рис. 2).

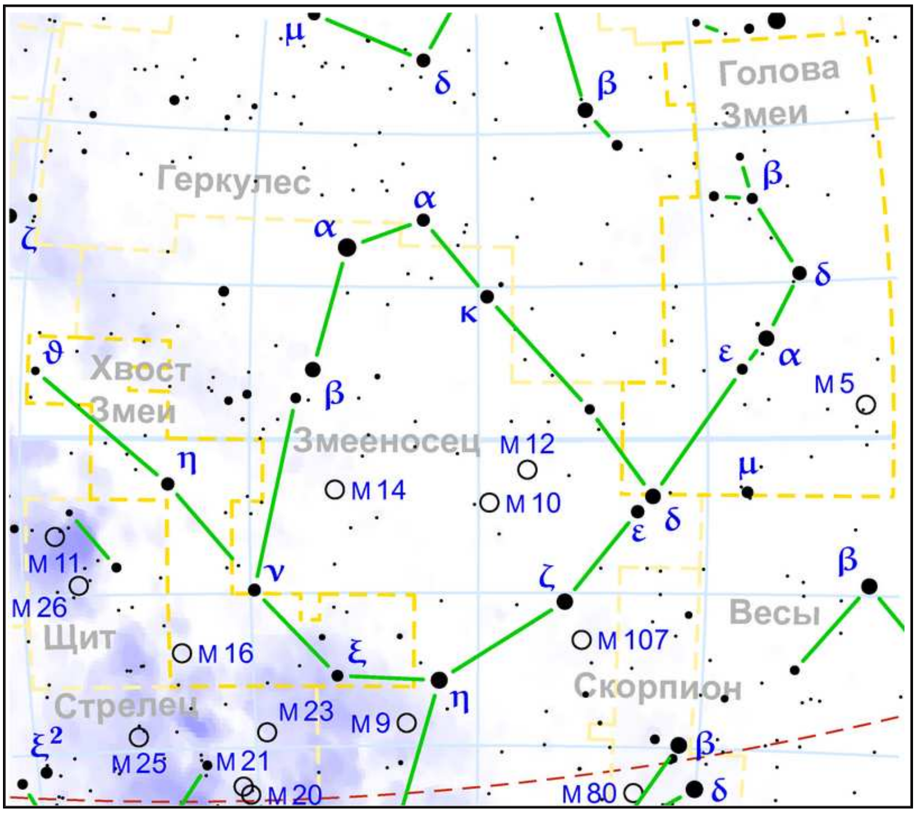

Рис. 1: Созвездие Змея, разделенное созвездием Змееносца (иллюстрация Wikipedia).

Это единственное созвездие, состоящее из двух несвязанных частей, разделенных созвездием Змееносец – "Голова змеи" находится северо-западнее, "Хвост змеи" – восточнее. Диапазон склонений на которых простирается данное созвездие – $(-16°, +26°)$. Поэтому можно утверждать, что Змея расположена преимущественно в северной полусфере небосвода.

Ответ: Змея; Змееносец – «разделяющее» созвездие; Змея расположена преимущественно в северной полусфере небосвода. ($\$_{\max} = 3$ баллов).

Задача № 2. «Тот самый гномон»

Условие. Что такое гномон? Какие астрономические задачи можно решить с помощью него? Можно ли его создать в домашних условиях? (3 балла).

Решение:

Гно́мон (с древне-греч. – указатель) – древнейший астрономический инструмент, вертикальный предмет (стела, колонна, шест), позволяющий по наименьшей длине его тени (в полдень) определить угловую высоту солнца в меридиане. Кратчайшая тень указывает на положение полуденной линии и небесного меридиана. Гномоном также называют часть солнечных часов, по тени от которой определяется время в солнечных часах.

Гномон позволяет решить следующие астрономические задачи:

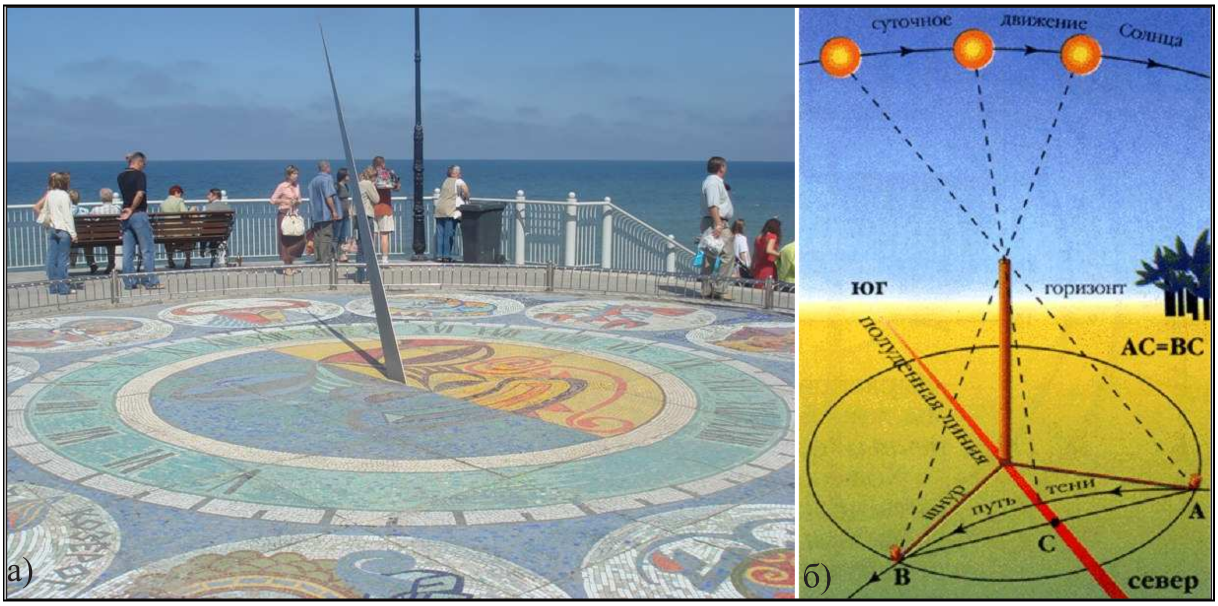

Рис. 2: а) Солнечные часы с гномоном в Светлогорске; б) к определению высоты Солнца в полдень с помощью гномона.

.

- определение момента наступления астрономического полудня, т.е. момента времени когда Солнце занимает наивысшее положение над горизонтом;
- определение сторон света, т.е. направлений на юг, север, восток и запад;
- определение высоты Солнца в любой момент времени в течение дня;
- зная склонение Солнца на момент наблюдений, с помощью гномона можно легко определить широту местности.

В качестве гномона можно использовать любой предмет одно измерение которого существенно больше остальных, например, карандаш, линейка, балка, черенок от лопаты и др. Поэтому его легко изготовить и использовать в домашних условиях. *Главное условие для гномона* – он должен быть закреплен на ровной горизонтальной поверхности вдоль отвесной линии. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Видимость и неточечность тел Солнечной системы»

Условие. Какие из известных Вам тел Солнечной системы, видимых невооруженным глазом, могут наблюдаться этим глазом как протяженные (неточечные) тела? (1 балл за каждый объект).

Решение:

Как известно, здоровый человеческий глаз разрешает небесное тело как неточечный объект, если его угловые размеры превышают $1' \div 2'$ $(60'' \div 120'')$.

К телам Солнечной системы, доступных в наблюдениях невооруженному глазу человека, которые когда-либо были видны с поверхности Земли под углом $\geq 1'$ относятся

1) Солнце (угловой диаметр $D''_{\odot} = 32'$),

2) Луна (угловой диаметр $D''_{☾} = 32'$),

3) Венера (максимальный угловой диаметр $D''_{♀} = 65''$),

4) кометы, например Хейла-Боппа (максимальный угловой диаметр комы во время сближения с Землей в 1997 году составил $D''_{\text{coma}} \geq 15'$), Холмса (максимальный угловой диаметр комы во время взрыва ядра в 2007 году составил $D''_{\text{coma}} \geq 32'$);

К таким телам также могут также относится, в принципе, крупные астероиды, тесно сближающиеся с Землей. Однако, к счастью, таких астероидов сегодня науке не известно.

<u>Ответ:</u> 1) Солнце, 2) Луна, 3) Венера, 4) кометы Хейла-Боппа, Холмса. ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Задача № 4. «О продолжительности лета и не только»

<u>Условие.</u> Какое географическое полушарие (северное или южное) летом получает больше энергии от Солнца за единицу времени? В каком полушарии продолжительность астрономического лета больше? Свой ответ поясните. (4 балла).

<u>Решение:</u>

Прежде всего отметим, что необходимыми и достаточными условиями смены времен года на поверхности Земли являются

1. наклон географического экватора к плоскости эклиптики (под углом, отличным от нуля);
2. постоянство ориентации оси вращения Земли в пространстве;
3. годичное обращение Земли вокруг Солнца.

Солнце является стационарной звездой, полная мощность излучения которой изменяется со временем несущественно. Однако, орбита Земли является эллиптической, следовательно, в течение года расстояние между Землей и Солнцем изменяется, а, следовательно, изменяется освещенность Земли (поскольку последняя подчиняется "закону обратных квадратов").

В начале января (2-5 января) Земля пребывает в перигелии своей орбиты – ближайшей точке к Солнцу. Именно здесь Земля получает максимальное количество энергии от Солнца за единицу времени. В это время лето наблюдается в южном полушарии. Т.о. южное полушарие летом получает больше энергии от Солнца за единицу времени.

Астрономическое лето – это промежуток времени между летним солнцестоянием и осенним равноденствием – продолжается в Северном полушарии с 20 (21) июня по 22 (23) сентября, в Южном полушарии с 21 (22) декабря по 20 (21) марта. В Северном полушарии лето продолжается приблизительно 93.6 суток, в Южном полушарии – 89.0 суток. Т.о. продолжительность астрономического лета больше в северном полушарии, что также связано с эллиптичностью земной орбиты. Поскольку в период 20 (21) июня по 22 (23) сентября Земля движется в окрестности афелия своей орбиты, где ее орбитальная скорость минимальна, следовательно время движения Земли по орбите здесь максимально.

<u>Ответ:</u> южное географическое полушарие летом получает больше энергии от Солнца за единицу времени; продолжительность астрономического лета больше в северном полушарии. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Оптические двойные звезды»

<u>Условие.</u> Сегодня астрономам известно множество примеров оптических двойных звезд. Что они собой представляют? Могут ли компоненты такой звезды двигаться вокруг общего центра масс?(4 балла).

<u>Решение:</u>

Как известно, ***оптические двойные звезды*** – звезды, находящиеся почти на одном луче зрения, но удаленные друг от друга в пространстве на значительные расстояния. На небесной сфере данные звезды расположены рядом, имея вид двойных звезд. Отличаются от физических двойных звезд тем, что не составляют физической системы, т.е. пары звезд, связанных между собой силами притяжения и движущихся относительного общего центра масс[1].

[1] ***Центр масс системы*** – геометрическая точка, характеризующая движение системы тел как целого в пространстве.

Т.о. компоненты такой звезды не могут двигаться вокруг общего центра масс, поскольку такового фактически не существует. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Тесное сближение КА "Новые горизонты" с системой "Плутон-Харон"»

Условие. 14 июля 2015 года космический аппарат "Новые горизонты" (New Horizons, США) испытал тесное сближение с Плутоном (минимальное расстояние – $r_{\min}^{(1)} = 12500$ км) и его спутником Хароном ($r_{\min}^{(2)} = 28800$ км). С использованием значений радиусов данных тел ($R_1 = 1185$ км и $R_2 = 604$ км соответственно) определите угловые диаметры данных тел, зафиксированные с борта КА в моменты наибольшего сближения. Во сколько раз их угловые диаметры были больше углового диаметра Луны в среднее полнолуние? (5 баллов).

Дано:
$r_{\min}^{(1)} = 12500$ км,
$R_1 = 1185$ км;
$r_{\min}^{(2)} = 28800$ км,
$R_2 = 604$ км;

Найти:
D''_P, D''_H – ?
η_P, η_H – ?

Решение:

Определим понятия углового радиуса и диаметра. ***Угловой радиус небесного тела*** (ρ'') – угол, под которым из точки наблюдения виден радиус R небесного тела (см. рис. 3).

Из прямоугольного треугольника $\triangle OAC$ следует

$$\sin \rho'' = \frac{R}{r}, \ \Rightarrow, \ \rho'' = \arcsin \left[\frac{R}{r}\right]. \tag{1}$$

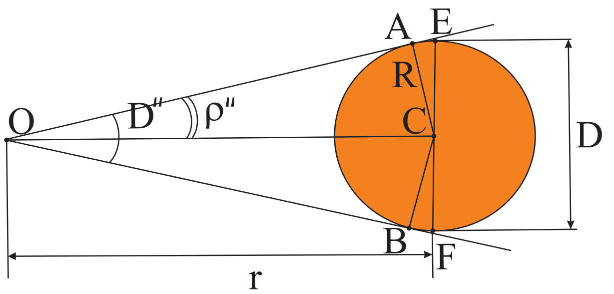

Рис. 3: к определению углового радиуса и диаметра небесного тела.

Угловой диаметр небесного тела (D'') – угол, между лучами, проведенными к диаметрально противоположным точкам диска небесного тела. Очевидно, что

$$D'' = 2\,\rho'' = 2\,\arcsin \left[\frac{R}{r}\right]. \tag{2}$$

С использованием формулы (2) вычисляем угловые диаметры данных тел: $D''_P = 10.9^\circ$, $D''_H = 2.4^\circ$.

Учитывая, что средний угловой диаметр диска Луны в полнолуние составляет $D''_{☾} = 32' = 0.53^\circ$, можно легко определить во сколько раз угловые диаметры небесных тел были больше углового диаметра Луны в среднее полнолуние:

$$\eta_P = \frac{D''_P}{D''_{☾}} = 20.4, \quad \eta_H = \frac{D''_H}{D''_{☾}} = 4.5.$$

Ответ: $D''_P = 10.9^\circ$, $D''_H = 2.4^\circ$; $\eta_P = 20.4$, $\eta_H = 4.5$. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 7. «Небесные тела на фото»

Условие. Вашему вниманию на рис. 4 представлена телескопическая фотография участка звездного неба. Какие типы небесных тел представлены вашему вниманию на данной фотографии? Дайте названия (имена собственные) этим объектам. (6 баллов).

Рис. 4: Телескопическая фотография участка звездного неба.

Решение:

На данной фотографии представлены следующие типы объектов: 1) звезды (отмечены номерами 1 и 2), 2) планета (Юпитер, отмечена № 5); 3) спутники классических планет (Луна отмечена № 5; 4 спутника Юпитера: Ио, Европа, Ганимед, и Каллисто отмечены № 3,4,6,7). (6 баллов).

Задача № 8. «Фаза небесного тела № 8»

Условие. С использованием фотографии, представленной на рис. 4, оцените видимую фазу небесного тела № 8. Чему был равен фазовый угол данного тела в этот момент времени? (7 баллов).

Дано:
фотография объекта.

Найти:
Φ, φ–?

Решение:

Как известно, ***фазой*** (Φ) небесного тела называется отношение площади (S_{lit}) части его поверхности, освещаемой Солнцем, к полной площади (S_{tot}) поверхности обращенной к наблюдателю.

$$\Phi = \frac{S_{\rm lit}}{S_{\rm tot}}. \qquad (3)$$

Для тел, имеющих форму шара, формулу (3) можно свести к отношению ширины (d) «серпа»

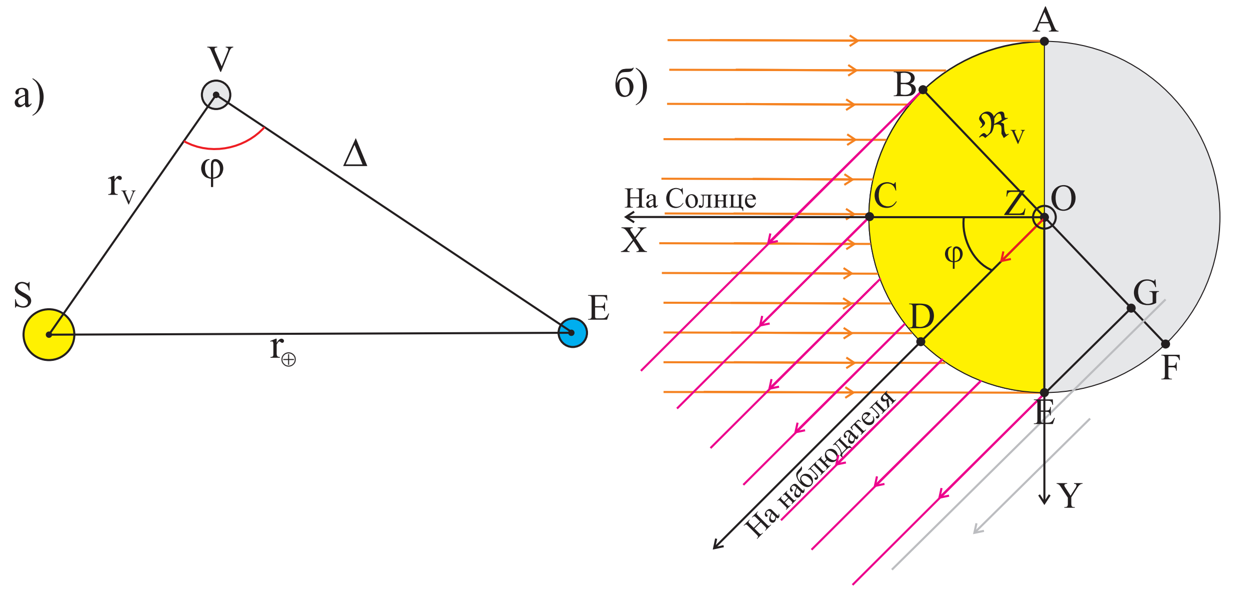

Рис. 5: к определению а) фазового угла небесного тела (V), б) его фазы.

(измеряемой в направлении «на Солнце»), к диаметру (D) его видимого диска (см. рис. 5.б):

$$\Phi = \frac{d}{D} = \frac{BG}{BF}. \tag{4}$$

Измеряя по картинке указанные параметры, в результате получаем $d = 21$ мм, $D = 135$ мм (ваши результаты для d и D могут отличаться от указанных ранее, в силу возможности изменения масштаба используемой картинки), $\Phi = 0.16$.

Фазовым углом небесного тела называется угол между направлениями на Солнце и на наблюдателя (на Землю), если смотреть из центра данного тела (см. рис. 5.а).

Из теории известно, что фаза Φ связана с фазовым углом φ соотношением вида:

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\varphi\right), \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left[2\Phi - 1\right] = 133^\circ. \tag{5}$$

Ответ: $\Phi = 0.16$, $\varphi = 133^\circ$. (7 баллов).

Задача № 9. «Угловой диаметр тела № 5 и расстояние до него»

Условие. С использованием фотографии (см. рис. 4) и результатов задачи № 7, оцените угловой диаметр тела № 5. Оцените расстояние до него (на момент наблюдений), если известно, что его радиус равен $R = 71492$ км. (8 баллов).

Дано:
$R_5 = 71492$ км.
Найти:
D''_5, r_5 – ?

Решение:

Согласно решению задачи № 7 объектом № 5 на рис. 4 является Юпитер, а объектом № 8 – Луна. Зная средний угловой диаметр Луны – $D''_{☾} = 32'$, и полагая, что угловой масштаб фотографии (μ_a) на всей фотографии постоянен, то можно легко определить последний:

$$\mu_a = \frac{D''_{☾}}{\mathcal{D}_{☾}} = \frac{D''_{♃}}{\mathcal{D}_{♃}}, \quad \Rightarrow \quad D''_{♃} = \mathcal{D}_{♃}\left(\frac{D''_{☾}}{\mathcal{D}_{☾}}\right),$$

здесь $\mathcal{D}_{☾}$, $\mathcal{D}_{♃}$ – диаметры Луны и Юпитера измеренные в мм по фотографии. В нашем случае составляют $\mathcal{D}_{☾} = 163$ мм, $\mathcal{D}_{♃} = 4$ мм (ваши результаты для $\mathcal{D}_{☾}$, $\mathcal{D}_{♃}$ могут отличаться от указанных ранее, в силу возможности изменения масштаба используемой картинки). В результате $\mu_a = 11.8''/\text{мм}$, $D''_5 = D''_{♃} = 47''$.

Из формулы (2) следует, что

$$r_5 = r_{♃} = \frac{R_5}{\sin(D''_{♃}/2)} = 6.275 \cdot 10^8\,\text{км}. \tag{6}$$

Ответ: $D''_5 = 47''$, $r_5 = 6.275 \cdot 10^8$ км. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10. «Покрытие системы тел 3-7»

Условие. Автор фотографии, представленной на рис. 4, утверждал, что последняя была сделана вскоре после окончания покрытия системы тел 3-7 телом № 8. Оцените интервал времени, прошедший после окончания покрытия системы тел 3-7, в предположении, что тело № 8 двигалось в направлении Солнца. Оцените также продолжительность полного покрытия данных тел. (8 баллов).

Решение:

Прежде всего определим угловую скорость видимого движения Луны относительно звезд: для этого учтем, что сидерический период обращения Луны вокруг Земли (определяемый относительно звезд) равен $T_{☾} = 27.32$ сут, тогда ее угловая скорость:

$$\omega_{☾} = \frac{360^\circ}{T_{☾}} = 13.18^\circ/\text{сут} = 0.549'/\text{мин}.$$

Покрытие системы тел 3-7 закончилось, когда спутник 3 вышел из-за тела Луны (тело № 8). Определим расстояние между спутником 3 и Луной вдоль прямой «Солнце-Луна» – $\bar{\ell}_{3-8} = 10$ мм. Соответствующее угловое расстояние между телами $\ell_{3-8} = \mu_a \cdot \bar{\ell}_{3-8} = 118''$ (здесь $\mu_a = 11.8''/\text{мм}$ – угловой масштаб фотографии, определенный в предыдущей задаче). Тогда интервал времени, прошедший с момента окончания покрытия системы тел 3-7 до момента съемки составляет

$$\tau_1 = \frac{\ell_{3-8}}{\omega_{☾}} = 215\,\text{сек} = 3\,\text{мин}\,35\,\text{сек}.$$

Продолжительность полного покрытия тел 3-7 Луной определятся промежутком времени, отсчитываемым от момента захода за тело Луны спутника Юпитера № 3 до момента выхода спутника № 7 из-за ее тела. Вычислим промежутки времени от указанных моментов до момента получения фотографии. Время, прошедшее от окончания покрытия спутника № 7 до момента создания фото, есть

$$\tau_7 = \frac{\ell_{7-8}}{\omega_{☾}} = \frac{53\,\text{мм} \cdot 11.8''/\text{мм}}{0.549'/\text{мин}} = 18.99\,\text{мин},$$

здесь ℓ_{7-8} – угол между текущим положением спутника № 7 и крайней правой точкой хорды (параллельной направлению «Солнце-Луна»), вдоль которой осуществлялся транзит спутника за телом Луны. По рисунку мы определили соответствующее линейное расстояние – 53 мм, доможив на угловой масштаб фотографии, мы получили $\ell_{7-8} = 10.4'$.

Аналогично рассуждая, определяем время, прошедшее от момента начала покрытия спутника № 3 до момента создания фотографии:

$$\tau_3 = \frac{\tilde{\ell}_{3-8}}{\omega_{☾}} = \frac{157\,\text{мм} \cdot 11.8''/\text{мм}}{0.549'/\text{мин}} = 56.24\,\text{мин},$$

где $\tilde{\ell}_{3-8} = 30.88'$ – угол между текущим положением спутника № 3 и крайней левой точкой хорды (параллельной направлению «Солнце-Луна»), вдоль которой осуществлялся транзит спутника за телом Луны.

В итоге время полного покрытия составляет

$$\Delta\tau = \tau_3 - \tau_7 = 37.25\,\text{мин}.$$

Ответ: $\tau_1 = 215\,\text{сек} = 3\,\text{мин}\,35\,\text{сек}$, $\Delta\tau = 37.25\,\text{мин}$. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «SkyOrbiter-будущие технологии доступа к интернету»

Условие. Португальская компания Quarkson предлагает использовать в будущем для доступа к сети интернета армию беспилотных летательных аппаратов – SkyOrbiter. Так модель дрона HA75, способна парить на высоте 22 км над одной и той же точкой поверхности Земли и пребывать в полете до 5 лет. Опираясь на имеющиеся данные, определите его площадь покрытия (в км^2) доступом к сети. Какое минимальное количество таких аппаратов необходимо для полного покрытия экватора Земли? (9 баллов).

Дано:
$H = 22$ км,
$\tau = 5$ лет.

Найти:
S_{cov}, N_{min} – ?

Решение:

Рассмотрим положение дрона над поверхностью Земли (см. рис. 6, точка S). Электромагнитный сигнал, излучаемый аппаратурой связи дрона, распространяется по прямой. Наиболее удаленные точки поверхности Земли от дрона, которых еще может достичь сигнал – точки основания сектора (например, A и B) – части поверхности шара, выделенной цветом. При этом зона покрытия сигналом – сам сектор.

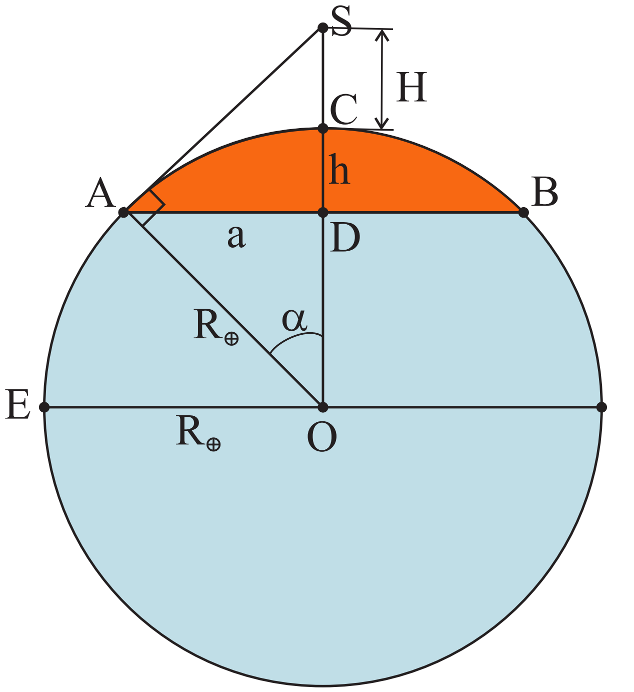

Рис. 6: к определению площади покрытия доступом к сети.

Площадь поверхности сектора для шара радиуса $R_\oplus$ определяется выражением вида:

$$S_{\text{cov}} = 2\pi\, R_\oplus^2\,(1 - \cos\alpha)\,. \tag{7}$$

где α – угол раствора сектора, т.е. угол между его осью симметрии и радиусом шара, проведенным к точке его основания (см. рис. 6).

Из прямоугольного треугольника $\triangle OAS$ следует, что

$$\cos\alpha = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + H}.$$

В итоге площадь сектора или зоны покрытия есть

$$S_{\text{cov}} = 2\pi\, R_\oplus^2 \frac{H}{R_\oplus + H} = 8.78 \cdot 10^5 \text{ км}^2,$$

здесь мы учли, что $R_\oplus = 6371$ км – средний радиус Земли. Угол раствора между диаметрально противоположными образующими сектора зоны покрытия дрона есть

$$\beta = 2\alpha = 2\,\text{arccos}\left[\frac{R_\oplus}{R_\oplus + H}\right] = 9.51^\circ.$$

Тогда минимальное количество таких аппаратов, необходимых для полного покрытия экватора Земли есть

$$N_{\text{min}} = \left[\frac{360^\circ}{\beta}\right] + 1 = 38.$$

Ответ: $S_{\text{cov}} = 2\pi\, R_\oplus^2 \frac{H}{R_\oplus + H} = 8.78 \cdot 10^5$ км^2, $N_{\text{min}} = \left[\frac{360^\circ}{\beta}\right] + 1 = 38$. ($\$_{\text{max}} = 9$ баллов).

Задача № 12. «Кинематика движения дрона SkyOrbiter HA75»

Условие. Полагая, что дрон SkyOrbiter HA75 все время эксплуатации (5 лет) проведет в воздухе, без посадок, вычислите: 1) количество витков, которые он совершит вокруг земной оси за это время, 2) избыток расстояния, которое накопится у дрона за одни сутки в суточном движении, в сравнение с точкой поверхности, над которой он парит; 3) оцените среднее количество солнечной энергии, которое выработают солнечные батареи дрона за все время эксплуатации на геоэкваторе, если солнечные батареи покрывают всю верхнюю поверхность крыльев, имеющих форму прямоугольника (75 × 1.5 м), КПД батарей $\eta = 10\%$, а солнечная постоянная равна на данной высоте $f_{\odot} = 1100$ Вт/м^2. (10 баллов).

Дано:
$a \times b = 75 \times 1.5$ м,
$\eta = 10\%$,
$f_{\odot} = 1100$ Вт/м^2.

Найти:
N, ΔS, W– ?

Решение:

Указанные пять лет эксплуатации могут включать либо 1 либо 2 високосных года. За один невисокосный год продолжительностью 365 календарных суток, земля делает 366 оборотов вокруг своей оси относительно далеких звезд, в каждом високосном – 367 оборотов. Окончательно количество витков, сделанных дроном вокруг земной оси есть

$$\text{слуйчай 1: 1 високосный год}: \quad N^{(1)} = 367 + 4 \cdot 366 = 1831.$$

$$\text{слуйчай 2: 2 високосных года}: \quad N^{(2)} = 2 \cdot 367 + 3 \cdot 366 = 1832.$$

Избыток расстояния, которое накопится у дрона в суточном движении, в сравнение с точкой поверхности, над которой он парит определяется разностью расстояний, которые пройдут данная точка и дрон, двигаясь по окружностям радиусов $R_{\odot}$ и $R_{\odot} + H$, где $R_{\oplus} = 6371$ км – средний радиус Земли, H – высота дрона над поверхностью Земли. В итоге

$$\Delta S = 2\pi\,(R_{\odot} + H) - 2\pi\,R_{\odot} = 2\pi\,H = 138\,\text{км}.$$

Оценим максимальное количество электрической энергии ($W_{\max}$), которое могли выработать солнечные батареи дрона за все время эксплуатации. Для этого учтем, что на экваторе продолжительность дня в среднем составляет $\tau_1 = 12$ часов или 0.5 суток. Если все время эксплуатации условия для приема солнечной энергии были оптимальными, то количество энергии

$$W_{\max} = \eta\, f_{\odot}\,(a \times b)\tau_1\, N_{days},$$

где N_{days} – количество дней в указанной пятилетке. Очевидно, возможны два альтернативных результата:

$$\text{слуйчай 1: 1 високосный год}: \quad N^{(1)}_{\text{days}} = 366 + 4 \cdot 365 = 1826.$$

$$\text{слуйчай 2: 2 високосных года}: \quad N^{(2)}_{\text{days}} = 2 \cdot 366 + 3 \cdot 365 = 1827.$$

В итоге имеем два ответа: $W^{(1)}_{\max} = W^{(2)}_{\max} = 9.76 \cdot 10^{11}$ Дж. Среднюю величину энергии можно оценить как

$$\bar{W} = \frac{W_{\max} + 0}{2} = \frac{1}{2} W_{\max} = 4.88 \cdot 10^{11}\,\text{Дж} \approx 4.9 \cdot 10^{11}\,\text{Дж}.$$

Ответ: 1) $N^{(1)} = 1831$ или $N^{(2)} = 1832$; 2) $\Delta S = 2\pi\,H = 138\,\text{км}$, 3) $\bar{W} = \frac{1}{2} W_{\max} \approx 4.9 \cdot 10^{11}$ Дж. ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень C)

Задача № 13. «Флаг Мавритании и астрономия»

Условие. На рисунке 7 представлен флаг Мавритании, принятый данным государством в 1959 году. Какие небесные тела или астрономические явления можно увидеть на данном флаге? Как

Рис. 7: Флаг Мавритании.

можно объяснить ориентацию месяца "рогами" вверх? Есть ли несоответствия действительности ("ляпы") на данном флаге? Можно ли их интерпретировать иначе и не прибегать к изменению картинки? (11 баллов).

Решение:

Астрономические образы, представленные на флаге Мавритании, можно трактовать по-разному:

Вариант № 1. Здесь представлена Луна в малой фазе (или молодой месяц) и звезда. Ориентацию месяца "рогами" вверх можно объяснить тем, что Мавритания – это африканское государство, достаточно близко расположенное к экватору, где подобная картина с Луной реалистична. Очевидным астрономическим ляпом видится изображение звезды на фоне темной части Луны. Такое в действительности невозможно, ибо тело Луны непрозрачно, а звезды удалены от Земли гораздо дальше Луны и потому звезда не может быть видна на фоне Луны.

Вариант № 2. Здесь изображено Солнце в фазе частного солнечного затмения (покрываемое Луной) и звезда. Здесь астрономический ляп тот же.

Вариант № 3. Здесь изображена Луна в фазе частного лунного затмения и звезда. Здесь астрономический ляп тот же.

Однако, астрономический ляп можно леквидировать, если звезду интерпретировать иначе. Например, ее можно рассматривать как вспышку на темной стороне Луны, в результате падения в эту область достаточно крупного метеороида. Ее также можно рассматривать как вспышку метеора, случайно спроецированную на темную область Луны. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Линейные размеры тени и полутени Луны»

Условие. В некоторый момент времени на земном экваторе наблюдается полное солнечное затмение. Оцените возможные линейные размеры тени и полутени, отбрасываемые Луной на земную поверхность. (12 баллов).

Решение:

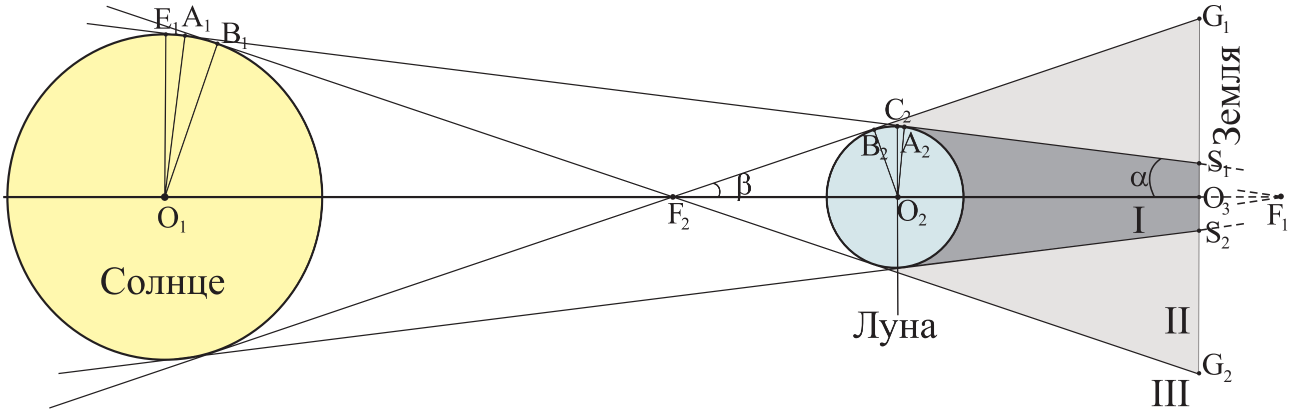

Рис. 8: к определению линейных размеров тени и полутени Луны.

Рассмотрим процесс формирования тени полутени Луны у поверхности Земли. Поскольку Солнце много больше (в 400 раз!) Луны, то всегда существуют световые лучи (например, A_1A_2, на рис. 8), которые проходят по касательной к поверхностям данных тел (с одной стороны относительно прямой, проходящей через центры данных тел) и образуют внешнюю границу сходящегося к Земле конуса тени (область I за Луной).

Всегда существуют световые лучи, которые проходят в касательную, по разные стороны тел относительно прямой, проходящей через центры данных тел. Последние образуют внешнюю границу расходящегося конуса полутени (область II за Луной).

Определим угол α при вершине F_1 конуса тени и расстояние O_2F_1 от центра Луны до вершины. Для этого воспользуемся подобием треугольников $\triangle O_1A_1F_1$ и $\triangle O_2A_2F_1$:

$$\frac{O_1A_1}{O_2A_2} = \frac{O_1F_1}{O_2F_1}, \;\Rightarrow\; L_2 = O_2F_1 = O_1F_1\left(\frac{O_2A_2}{O_1A_1}\right) = (O_1O_2 + L_2)\left(\frac{O_2A_2}{O_1A_1}\right).$$

Учтем далее, что $O_1A_1 = \Re_\odot = 695500$ км – радиус Солнца, $O_2A_2 = \Re_☾ = 1737$ км – радиус Луны, тогда пусть

$$\nu = \frac{\Re_☾}{\Re_\odot} = 2.498\cdot 10^{-3}.$$

$\Delta = O_1O_2 = r_\odot - r_☾$ – расстояние между Солнцем и Луной в фазе затмения. Расстояние Солнца ($r_\odot$) и Луны ($r_☾$) от Земли изменяются в следующих пределах (см. например, Wikipedia):

$$147098290\,\text{км} \le r_\odot \le 152098232\,\text{км}, \quad (363104-6378)\,\text{км} \le r_☾ \le (405696-6378)\,\text{км}, \qquad (8)$$

следовательно, расстояние Δ может изменяться в пределах:

$$146698972\,\text{км} \le \Delta \le 151741506\,\text{км}.$$

Тогда

$$L_2\,(1-\nu) = \nu\,\Delta, \;\Rightarrow\; L_2 = \frac{\nu\,\Delta}{1-\nu}. \qquad (9)$$

В итоге

$$367651\,\text{км} \le L_2 \le 380289\,\text{км}. \qquad (10)$$

Тогда синус угла α есть

$$\sin\alpha = \frac{\Re_☾}{L_2}, \;\Rightarrow\; \alpha = \arcsin\left[\frac{\Re_☾}{L_2}\right] \approx \Re_\odot\left[\frac{1-\nu}{\Delta}\right].$$

Тогда диаметр пятна лунной тени на земном экваторе есть

$$D_{\text{Sh}} = S_1S_2 = 2\,O_3F_1\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx 2(L_2 - r_☾)\Re_\odot\left[\frac{1-\nu}{\Delta}\right] = 2\Re_\odot\left(\frac{\nu\,\Delta}{1-\nu} + r_\odot - r_☾ - r_\odot\right)\left[\frac{1-\nu}{\Delta}\right] =$$

$$= 2\Re_\odot\left(\frac{\nu\,\Delta}{1-\nu} + \Delta - r_\odot\right)\left[\frac{1-\nu}{\Delta}\right] = 2\Re_\odot\left(1 - \frac{r_\odot(1-\nu)}{\Delta}\right) = 2\Re_\odot\left(1 - \frac{1-\nu}{1-x}\right), \quad x = \frac{r_☾}{r_\odot}.$$

В итоге

$$D_{\rm Sh} = 2\mathfrak{R}_\odot \left(1 - \frac{1-\nu}{1-x}\right), \ \text{где} \ x = \frac{r_☾}{r_\odot}. \tag{11}$$

Из последнего результата следует, что диаметр пятна достигает максимального значения, в случае, когда параметр x принимает минимальное значение (т.е. когда Земля находится в афелии своей орбиты, а Луна в перигее своей орбиты). При $x = \nu$ диаметр пятна лунной тени становится равным нулю! Поскольку x может принимать значения из интервала:

$$2.345 \cdot 10^{-3} \le x \le 2.715 \cdot 10^{-3}, \tag{12}$$

то диаметр пятна лунной тени может принимать значения из интервала

$$0 \le D_{\rm Sh} \le 213\,\text{км}.$$

Определим далее диаметр лунной полутени G_1G_2. Воспользуемся подобием треугольников $\triangle O_1B_1F_2$ и $\triangle O_2B_2F_2$:

$$\frac{O_1B_1}{O_2B_2} = \frac{O_1F_2}{O_2F_2},$$

учитывая, что $O_1B_1 = \mathfrak{R}_\odot$, $O_2B_2 = \mathfrak{R}_☾$, $O_2F_2 = \rho$, $O_1F_2 = \Delta - \rho$, тогда последнее уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\mathfrak{R}_\odot}{\mathfrak{R}_☾} = \frac{\Delta - \rho}{\rho}, \ \Rightarrow \ \rho = \frac{\nu\,\Delta}{1+\nu}.$$

Тогда синус угла β, есть

$$\sin\beta = \frac{\mathfrak{R}_☾}{\rho}, \ \Rightarrow \ \beta \approx \frac{\mathfrak{R}_☾\,(1+\nu)}{\nu\,\Delta} = \frac{\mathfrak{R}_\odot(1+\nu)}{\Delta}.$$

В итоге диаметр лунной полутени есть

$$D_{\rm S-Sh} = G_1G_2 = 2\,F_2O_3\,\mathrm{tg}\,\beta \approx 2(\rho + r_☾)\mathfrak{R}_\odot \left[\frac{1+\nu}{\Delta}\right] = 2\mathfrak{R}_\odot \left(\frac{\nu\,\Delta}{1+\nu} - (r_\odot - r_☾) + r_\odot\right) \left[\frac{1+\nu}{\Delta}\right] =$$

$$= 2\mathfrak{R}_\odot \left(\frac{\nu\,\Delta}{1+\nu} - \Delta + r_\odot\right) \left[\frac{1+\nu}{\Delta}\right] = 2\mathfrak{R}_\odot \left(\frac{r_\odot(1+\nu)}{\Delta} - 1\right) = 2\mathfrak{R}_\odot \left(\frac{1+\nu}{1-x} - 1\right), \ x = \frac{r_☾}{r_\odot}.$$

В итоге

$$D_{\rm S-Sh} = 2\mathfrak{R}_\odot \left(\frac{1+\nu}{1-x} - 1\right), \ \text{где} \ x = \frac{r_☾}{r_\odot}. \tag{13}$$

В отличие от случая с пятном лунной тени, в данном случае диаметр пятна полутени принимает максимальное значение при максимальном значении x. В данном случае диаметр полутени всегда отличен от нуля, но принимает минимальное значение, когда x также минимален, в итоге

$$6752\,\text{км} \le D_{\rm S-Sh} \le 7271\,\text{км}.$$

Ответ: возможные размеры тени $0 \le D_{\rm Sh} \le 213\,\text{км}$, полутени – $6752\,\text{км} \le D_{\rm S-Sh} \le 7271\,\text{км}$. ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Угловой диаметр лунной тени»

Условие. Оцените максимальный угловой диаметр тени, отбрасываемой Луной на поверхность Земли во время полного солнечного затмения, если ее рассматривать с поверхности Луны. Сможет ли ее увидеть невооруженным глазом космонавт будущего, пребывающий на ее поверхности? (13 баллов).

Решение:

С использованием формулы (2), учитывая, что радиус пятна лунной тени R_{Sh} много меньше расстояния от Луны до Земли $r_{☾}$, угловой диаметр пятна лунной тени (в угловых секундах) можно записать в виде:

$$D'' \approx 2\left[\frac{R_{Sh}}{r_{☾}}\right]206265'' = \left[\frac{D_{Sh}}{r_{☾}}\right]206265''. \tag{14}$$

С использованием формулы (11), последний результат представляется в виде:

$$D''_{Sh} \approx 2\frac{\Re_{\odot}}{r_{☾}}\left(1-\frac{1-\nu}{1-x}\right)\times 206265'' = 2\left(\frac{\Re_{\odot}}{r_{\odot}}\right)\frac{1}{x}\left(1-\frac{1-\nu}{1-x}\right)\times 206265''. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться в том, что D''_{Sh} принимает максимальное значение в случае минимального значения параметра x. С учетом интервалов (8), (12), максимальное значение $D''_{Sh\,\max} = 123''$.

Разрешающая способность здорового человеческого глаза составляет $\beta_{\text{у}} = 60-100''$. Поскольку угловой диаметр пятна тени несколько больше $\beta_{\text{у}}$, то у космонавта будущего, в принципе, при благоприятных условиях есть шанс разглядеть данное пятно с Луны.

Ответ: $D''_{Sh\,\max} = 123''$; у космонавта будущего, в принципе, при благоприятных условиях есть шанс разглядеть данное пятно с Луны. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Окончание "эры полных солнечных затмений"»

Условие. На какое минимальное расстояние необходимо удалиться Луне от Земли, чтобы феномен полного солнечного затмения прекратил свое существование на Земле? Оцените время, через которое закончится "эра полных солнечных затмений", если известно, что в настоящее время Луна удаляется от Земли со скоростью 4 см/год. (13 баллов).

Решение:

Для того чтобы феномен полного солнечного затмения прекратил свое существование на Земле, необходимо, чтобы длина (L_2) конуса лунной тени была не больше расстояния от Луны до ближайшей точки поверхности Земли. Другими словами, диаметр пятна тени должен быть равен нулю. Согласно результату (11) задачи № 14 для диаметра пятна лунной тени имеем

$$D_{\text{Sh}} = 2\Re_{\odot}\left(1-\frac{1-\nu}{1-x}\right) = 0, \;\Rightarrow\; x \geq \nu, \text{ или } r_{☾} \geq \left(\frac{\Re_{☾}}{\Re_{\odot}}\right) r_{\odot},$$

здесь $\Re_{☾}$, $\Re_{\odot}$ – средние радиусы Луны и Солнца; $r_{\odot}, r_{☾}$ – расстояния от Земли до Солнца и Луны соответственно. Поскольку расстояние $r_{\odot}$ принадлежит интервалу (8), то принимая в качестве $r_{\odot}$ его максимальное значение в итоге получаем ограничение вида:

$$r_{☾} \geq 379941\,\text{км}.$$

Следовательно, в перигее своей орбиты Луна должна отстоять от Земли на расстоянии, удовлетворяющем последнему неравенству. В результате с учетом (8), минимальное расстояние, на которое необходимо удалиться Луне от Земли есть

$$\Delta r_{☾} = 379941 - (363104 - 6378) = 23215.4\,\text{км}.$$

Полагая, что скорость удаления спутника неизменна с течением времени, то время, через которое закончится "эра полных солнечных затмений" определяется следующим отношением

$$\tau = \frac{\Delta r_{☾}}{v_{☾}} = 580.38\,\text{млн. лет}.$$

Ответ: $\Delta r_{☾} = 23215.4$ км, $\tau = 580.38$ млн. лет. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Планета	$\mathfrak{R}_e$, км	P_P, час	Спутник	a_S, км	T_S, час	i_S, град
Марс	3396	24.6229	Фобос	9377.2	7.653	1.093
Юпитер	71492	9.925	Метида	128000	7.075	0.06
–	–	–	Адрастея	129000	7.158	0.03

Таблица 1: некоторые характеристики Марса, Юпитера и их спутников.

Задача № 17. «Восход спутника на западе. Возможно ли такое?»

Условие. Существует ли среди планет Солнечной системы, видимых с поверхности Земли невооруженным глазом и известных человечеству еще со времен Гиппарха, такая планета(ы), пребывая у поверхности которой(ых) вблизи экватора, можно наблюдать восход ее естественного спутника на западе и его заход на востоке? Если да, то оцените время видимости спутника над поверхностью материнской планеты. (14 баллов).

Решение:

Невооруженным глазом с поверхности Земли видны следующие планеты: Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран. Однако, Уран был открыт У. Гершелем (1781 год), что существенно позже эры Гиппарха (2 в. до н.э.), поэтому Уран уже условию задачи не удовлетворяет. Меркурий и Венера не имеют спутников и потому также не удовлетворяют условию задачи.

Остаются лишь Марс, Юпитер, Сатурн. Для того чтобы указанный феномен имел место, необходимо выполнение следующих условий:

1. Спутник должен двигаться по орбите вокруг планеты в туже сторону, что и сама планета;
2. Период обращения (T_S) спутника вокруг планеты должен быть меньше периода вращения планеты P_p;
3. Плоскость орбиты спутника должна иметь малый угол наклона к плоскости экватора планеты.

У Сатурна нет спутников, которые удовлетворяли указанным условиям (см. например Wikipedia, спутники Сатурна).

У Марса существует лишь один такой спутник – Фобос, а у Юпитера – дав спутника – Метида и Адрастея. Основные характеристики данных тел представлены в таблице 1. Оценим время видимости спутника над поверхностью материнской планеты. Для этого рассмотрим рис. 9.

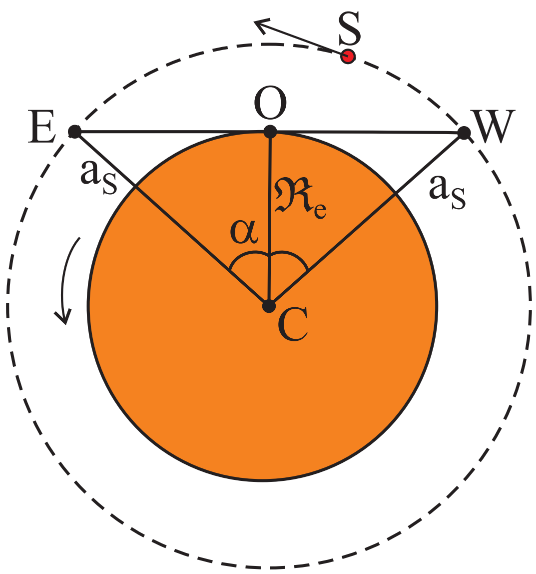

Рис. 9: к оценке времени видимости спутника над поверхностью материнской планеты.

Поскольку спутник движется в том же направлении что и планета, то относительно центра планеты (т. C) угловая скорость движения спутника будет равна

$$\omega_{\rm rel} = \frac{2\pi}{T_S} - \frac{2\pi}{P_P} = 2\pi\left(\frac{P_P - T_S}{P_P\,T_S}\right). \quad (16)$$

Спутник будет виден из точки экватора планеты O, если только спутник будет пребывать на малой дуге EW своей орбиты. Данной дуге отвечает угол раствора 2α, который можно определить из прямоугольного треугольника OCW.

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{R}_e}{a_S}, \;\Rightarrow\; \alpha = \arccos\left[\frac{\mathfrak{R}_e}{a_S}\right]. \quad (17)$$

В итоге время видимости планеты составит

$$\tau_{\rm vis} = \frac{2\,\alpha}{\omega_{\rm rel}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{P_P\,T_S}{P_P - T_S}\right)\arccos\left[\frac{\mathfrak{R}_e}{a_S}\right]. \quad (18)$$

выполняя численные расчеты, в результате получаем следующие результаты:

Спутник	Фобос	Метида	Адрастея
Время $\tau_{\rm vis}$, час	4.24	7.62	8.04

Рис. 10: схематичный чертеж трубы Кеплера.

Ответ: да, существует. У Марса – спутник Фобос ($\tau_{\rm vis} = 4.24$ часа), у Юпитера – Метида ($\tau_{\rm vis} = 7.62$ часа) и Адрастея – ($\tau_{\rm vis} = 8.04$ часа). ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Характеристики самодельной трубы Кеплера из очковых стекол»

Условие. В одном отечественном научно-популярном журнале был представлен простой рецепт изготовления самодельной астрономической трубы по схеме Кеплера из очковых стекол. Согласно ему, "для этого необходимо два мениска (выпукло-вогнутые линзы) с оптической силой $\Phi_1 = +0.5$ дптр, расположить с одного конца трубы объектива на расстоянии 40-50 мм друг от друга выпуклыми сторонами наружу (см. рис. 10). Между ними необходимо расположить диафрагму с диаметром $D_d = 25$ мм, для уменьшения сферической и хроматической абберацций. С другого конца трубы объектива следует расположить трубу меньшего диаметра, в которую помещался бы окуляр. В качестве окуляра рекомендуется использовать двояко выпуклую линзу небольшого диаметра (будем полагать $D_{\rm Ok} = 10$ мм) от лупы с увеличением $\Gamma_2 = 10^{\times}$". Для данной трубы вычислите:

1. Фокусные расстояния объектива и окуляра;
2. Увеличение и поле зрения телескопа;
3. Разрешающую способность и проницающую силу телескопа.

Можно ли в данную трубу разрешить двойную звезду β Лебедя (Альбирео) и увидеть галилеевы спутники Юпитера и спутники Марса?

Решение:

1. Для определения фокусного расстояния объектива воспользуемся формулой для фокусного расстояния системы из двух тонких линз разнесенных на расстояние $L = 50$ мм (см. например книгу Ландсберга Г.С. "Оптика"):

$$\frac{1}{F_{\rm Ob}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1\,f_2}, \;\Rightarrow F_{\rm Ob} = \frac{f_1\,f_2}{f_1 + f_2 - L} = \frac{f_1^2}{2f_1 - L} = 101\,\text{см}.$$

здесь $f_1 = f_2 = 1/\Phi_1 = 2$ м. Для определения фокусного расстояния окуляра (лупы) учтем, что все лупы сегодня маркируются по коэффициенту увеличения, вычисленному по формуле для случая прямого увеличенного и мнимого изображения предмета:

$$\Gamma_2 = \frac{d_{\rm y}}{F_{\rm Ok}} + 1, \;\Rightarrow\; F_{\rm Ok} = \frac{d_{\rm y}}{\Gamma_2 - 1} = 2.8\,\text{см}. \tag{19}$$

где $d_{\rm y} = 25$ см – расстояние наилучшего зрения для взрослого человека средних лет.

2. Увеличение телескопа вычисляется по формуле

$$\Gamma = \frac{F_{\rm Ob}}{F_{\rm Ok}} = 36^{\times}.$$

Поле зрения телескопа определяется выражением вида:

$$\omega = \frac{\Omega}{\Gamma} = 0.56^\circ = 33',$$

здесь Ω – угловое поле зрения окуляра (лупы), которое, в свою очередь, можно определить выражением вида:

$$\Omega = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{D_{\mathrm{Ok}}}{2\,F_{\mathrm{Ok}}}\right) = 20.2^\circ.$$

3. ***Разрешающая способность телескопа*** – это минимальное значение угла между компонентами двойной звезды, на котором она еще разрешается как двойная. Для рефрактора данная величина определяется выражением вида:

$$\beta = \frac{140''}{D_{\mathrm{d}}[\text{мм}]} = 5.6''.$$

Проницающая сила телескопа – предельная звездная величина самых тусклых звезд, которые еще видны в данный инструмент, определяемая формулой

$$m_T = 2.1^{\mathrm{m}} + 5^{\mathrm{m}} \lg D_{\mathrm{Ob}}[\text{мм}] = 9.1^{\mathrm{m}}.$$

В данную трубу можно легко разрешить Альбирео, поскольку угловое расстояние между ее компонентами равно $34''$, что существенно больше разрешающей способности трубы β. В данную трубу можно легко пронаблюдать галилеевы спутники Юпитера поскольку их звездная в окрестности противостояния планеты составляет $\sim 5^m \div 6^m$, что существенно меньше проницающей силы данного инструмента. Однако, увидеть спутники Марса – Фобос и Деймос в данный инструмент увидеть невозможно, поскольку их звездная величина в окрестности противостояния составляет $\sim 12^m \div 13^m$, что существенно больше m_T.

Ответ: 1) $F_{\mathrm{Ob}} = 101$ см, $F_{\mathrm{Ok}} = 2.8$ см; 2) $\Gamma = 36^\times$, $\omega = 0.56^\circ = 33'$; 3) $\beta = 5.6''$, $m_T = 9.1^{\mathrm{m}}$; 4) в данный инструмент можно легко разрешить Альбирео и пронаблюдать галилеевы спутники Юпитера. Однако, увидеть спутники Марса – Фобос и Деймос в данный инструмент невозможно. ($\$_{\max} = 15$ баллов).